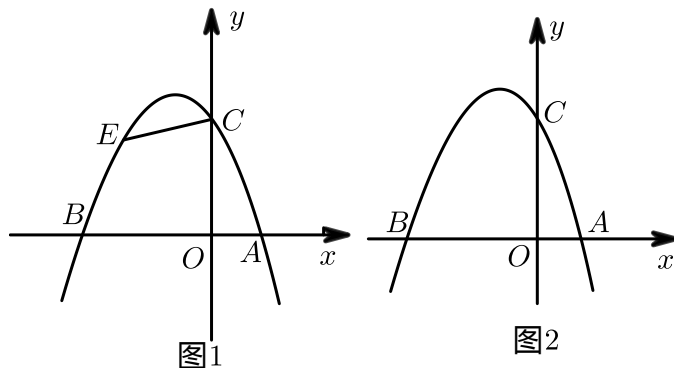


第1讲二次函数与三角形存在性（加油站）

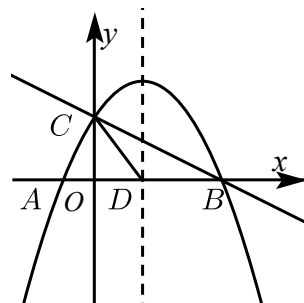
一、等腰三角形

1. 如图1，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ ($a \neq 0$)与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-3, 0)$ 与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 如图1，若点 E 为第二象限抛物线上一动点，连接 BE ， CE ，求四边形 $BOCE$ 面积的最大值，并求此时 E 点的坐标。
- (3) 如图2，在 x 轴上是否存在一点 D 使得 $\triangle ACD$ 为等腰三角形？若存在，请求出所有符合条件的点 D 的坐标，若不存在，请说明理由。

2. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，抛物线的对称轴交 x 轴于点 D ，已知 $A(-1, 0)$ ， $C(0, 2)$ 。

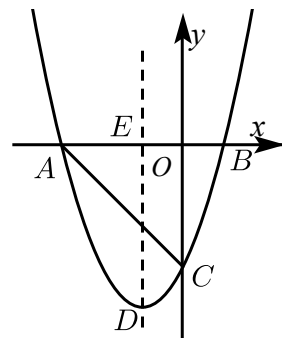


- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 在抛物线的对称轴上是否存在点 P ，使 $\triangle PCD$ 是以 CD 为腰的等腰三角形？如果存在，直接写出 P 点的坐标；如果不存在，请说明理由。
- (3) 点 E 是线段 BC 上的一个动点，过点 E 作 x 轴的垂线与抛物线相交于点 F ，当点 E 运动到什么位置时， $\triangle CBF$ 的面积最大？求出 $\triangle CBF$ 的最大面积及此时 E 点的坐标。

3. 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 交 x 轴于 $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 连接 AC , BC , M 为线段 OB 上的一个动点, 过点 M 作 $PM \perp x$ 轴, 交抛物线于点 P , 交 BC 于点 Q .
- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 过点 P 作 $PN \perp BC$, 垂足为点 N . 设 M 点的坐标为 $M(m, 0)$, 请用含 m 的代数式表示线段 PN 的长, 并求出当 m 为何值时 PN 有最大值, 最大值是多少?
- (3) 试探究点 M 在运动过程中, 是否存在这样的点 Q , 使得以 A , C , Q 为顶点的三角形是等腰三角形. 若存在, 请求出此时点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

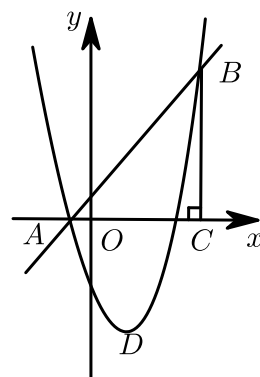
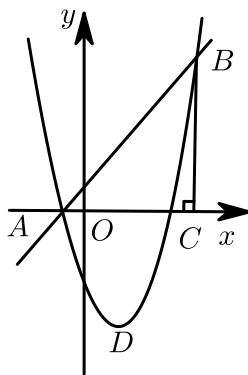
二、 直角三角形

4. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 6$ ($a \neq 0$)与 x 轴交于点 $A(-6, 0)$ 、 $B(2, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，连接 AC



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 若点 P 为第三象限内抛物线上的一点，设 $\triangle PAC$ 的面积为 S ，求 S 的最大值并求出此时点 P 的坐标 .
- (3) 设抛物线的顶点为 D ， $DE \perp x$ 轴于点 E ，在 y 轴上是否存在点 Q ，使得 $\triangle ADQ$ 是直角三角形？若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由 .

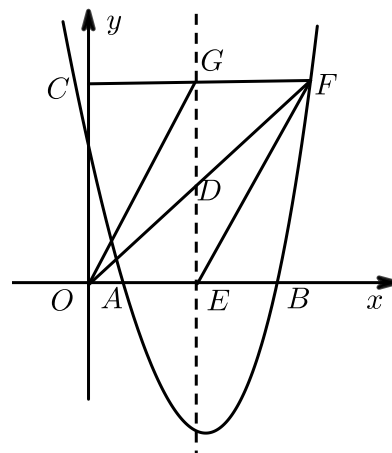
5. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = x + 1$ 与抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 交于 A, B 两点，点 A 在 x 轴上，过点 B 作 x 轴的垂线 BC ，垂足为点 C ， $OC = 4$ ，抛物线的顶点为 D 。



备用图

- (1) 求抛物线解析式。
- (2) 点 E 是线段 AB 上一动点（点 A, B 除外），过点 E 作 x 轴的垂线交抛物线于点 F ，当线段 EF 的长度最大时，求点 E 的坐标。
- (3) 在(2)的条件下，在直线 EF 上是否存在点 P ，使 $\triangle ABP$ 是直角三角形？若存在，求出可能存在的 P 的坐标；若不存在，说明理由。

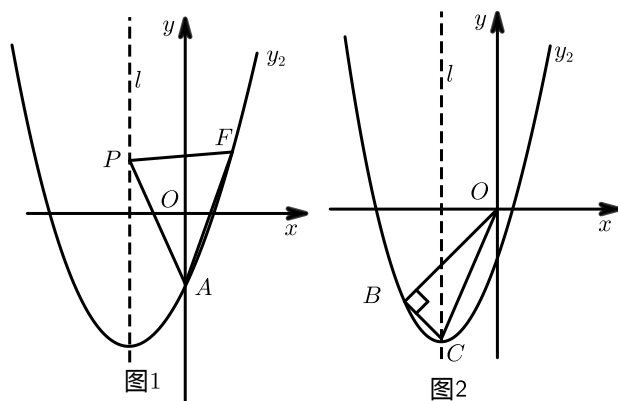
6. 如图，一抛物线与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，且 $A(1,0)$ ， $OB = OC = 5OA$ 。



- (1) 求此抛物线的解析式。
- (2) 若点 $F(6, m)$ 在此抛物线上，抛物线的对称轴交 x 轴于点 E ，交 CF 于点 G ，连接 OG 、 EF ，试判断四边形 $OEF G$ 的形状，并说明理由。
- (3) 在(2)的条件下，连接 OF 交对称轴于点 D ，在抛物线对称轴上是否存在点 P ，使 $\triangle OFP$ 是直角三角形？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

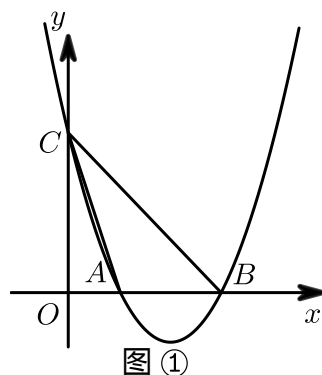
三、 等腰直角三角形

7. 将抛物线 $y_1 = x^2$ 先向左平移2个单位长度，再向下平移6个单位长度得到抛物线 y_2 .

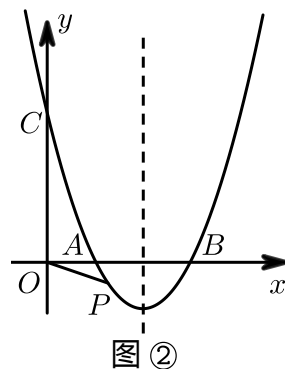


- (1) 直接写出抛物线 y_2 的解析式 .
- (2) 如图1，抛物线 y_2 交 y 轴于点 A ，点 $F(1, m)$ 在抛物线 y_2 上，在其对称轴 l 上是否存在一点 P ，使得 $\triangle PAF$ 周长最小？若存在求出周长最小值，若不存在请说明理由 .
- (3) 如图2，若点 B 在抛物线 y_2 上，点 C 在对称轴 l 上，当 $\triangle OBC$ 是以 OC 为斜边的等腰直角三角形时，求点 B 的坐标 .

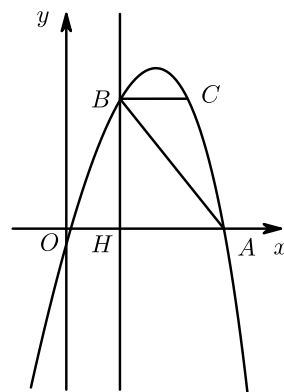
8. 如图①，已知抛物线 $y = ax^2 - 4amx + 3am^2$ (a 、 m 为参数，且 $a > 0$ ， $m > 0$)与 x 轴交于 A 、 B 两点 (A 在 B 的左边)，与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求点 B 的坐标 (结果可以含参数 m) .
- (2) 连接 CA 、 CB ，若 $C(0, 3m)$ ，求 $\tan \angle ACB$ 的值 .
- (3) 如图②，在(2)的条件下，抛物线的对称轴为直线 $l: x = 2$ ，点 P 是抛物线上的一个动点， F 是抛物线的对称轴 l 上的一点，在抛物线上是否存在点 P 使 $\triangle POF$ 成为以点 P 为直角顶点的等腰直角三角形？若存在，求出所有符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由 .



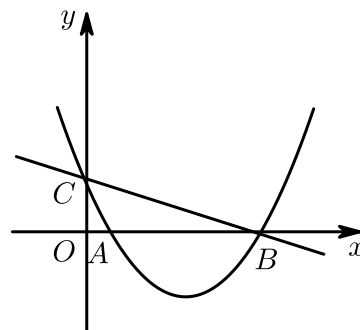
9. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx$ 过 $A(4, 0)$ ， $B(1, 3)$ 两点，点 C 、 B 关于抛物线的对称轴对称，过点 B 作直线 $BH \perp x$ 轴，交 x 轴于点 H 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 直接写出点 C 的坐标，并求出 $\triangle ABC$ 的面积。
- (3) 点 P 是抛物线上一动点，且位于第四象限，当 $\triangle ABP$ 的面积为 6 时，求出点 P 的坐标。
- (4) 若点 M 在直线 BH 上运动，点 N 在 x 轴上运动，当以点 C 、 M 、 N 为顶点的三角形为等腰直角三角形时，请直接写出此时 $\triangle CMN$ 的面积。

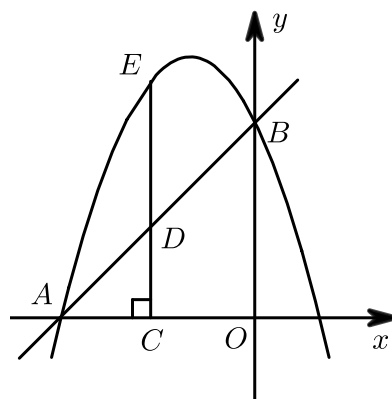
四、相似三角形

10. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 - 5ax + 2$ ($a \neq 0$) 与 y 轴交于点 C ，与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B 。



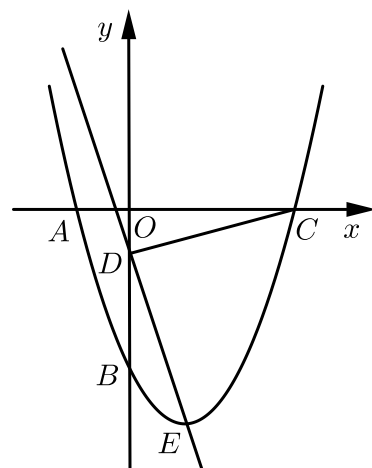
- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 若点 N 是抛物线上的动点，过点 N 作 $NH \perp x$ 轴，垂足为 H ，以 B, N, H 为顶点的三角形是否能够与 $\triangle OBC$ 相似？若能，请求出所有符合条件的点 N 的坐标；若不能，请说明理由。

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = x + 4$ 与坐标轴分别交于 A 、 B 两点，过 A 、 B 两点的抛物线为 $y = -x^2 + bx + c$ ．点 D 为线段 AB 上一动点，过点 D 作 $CD \perp x$ 轴于点 C ，交抛物线于点 E ．



- (1) 求抛物线的解析式．
- (2) 当 $DE = 4$ 时，求四边形 $CAEB$ 的面积．
- (3) 连接 BE ，是否存在点 D ，使得 $\triangle DBE$ 和 $\triangle DAC$ 相似？若存在，求此点 D 坐标．若不存在，说明理由．

12. 如图所示，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点， A 、 B 两点的坐标分别为 $(-1, 0)$ 、 $(0, -3)$ 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 点 E 为抛物线的顶点，点 C 为抛物线与 x 轴的另一交点，点 D 为 y 轴上一点，且 $DC = DE$ ，求出点 D 的坐标。
- (3) 在第二问的条件下，在直线 DE 上存在点 P ，使得以 C 、 D 、 P 为顶点的三角形与 $\triangle DOC$ 相似，请你直接写出所有满足条件的点 P 的坐标。